Programme de colle n°8 (16 au 20 novembre 2026)

1 Question de cours

La question de cours sera notée sur 6 points

Les questions de cours porteront sur la fin du chapitre **"ensembles et relations binaires"** et sur le chapitre **"calcul de primitives et d'intégrales"**

— Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Montrer que pour $(x, y) \in E^2$, on a :

$$x\mathcal{R}y \iff cl(x) = cl(y)$$

où $cl(x)$ désigne la classe d'équivalence de x.

— Montrer que deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

— Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ admet pour primitive

$$x \longmapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}.$$

(On écrira $\lambda = a + ib$)

— Soit f une fonction **continue** sur I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

— **Intégration par parties.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit u et v deux fonctions de **classe $\mathcal{C}^1$** entre a et b, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

— **Changement de variable.** Soit $\varphi : I \to J$ une fonction de **classe $\mathcal{C}^1$** sur l'intervalle I, à valeurs dans un intervalle J, et soit $f : J \to \mathbb{K}$ une fonction **continue**.
Si G est une **primitive** de f sur J, montrer que $G \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur I puis que, pour $a, b \in I$:

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

2 Compétences, méthodes, savoir-faire

Relations binaires

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E en montrant qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
- Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, déterminer des classes d'équivalence.
- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E en montrant qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, évaluer si c'est une relation d'ordre total ou d'ordre partiel.

Calcul de primitives et d'intégrales

f désigne une fonction **continue** d'un intervalle réel I dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Déterminer une primitive :
  - de fonctions usuelles (puissances, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques et hyperboliques, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, etc...)
  - de $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, pour en déduire celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
  - de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.
- Utiliser une intégration par parties ou un changement de variable pour déterminer une primitive ou calculer une intégrale.
- Utiliser la relation de Chasles pour calculer une intégrale.
- Utiliser la linéarité de l'intégrale.
- Étudier des suites définies par des intégrales.