Programme de colle n°6 (3 au 6 novembre 2026)

1 Question de cours

La question de cours sera notée sur 6 points

Les questions de cours porteront sur le chapitre **"fonctions usuelles".**

Afin de vous aider dans la préparation de votre colle, voici quelques questions incontournables :

- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$.
  En déduire alors que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- Justifier que la fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$
- Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$, avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.
- Justifier que la fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant $\exp 0 = 1$ ainsi que :
$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$
  Justifier aussi qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $\exp' = \exp$.
- Soit a un réel, $x > 0$ et $y > 0$. Justifier que :
  - $1^a = 1$, $x^0 = 1$, $\ln(x^a) = a \ln x$ et $x^a y^a = (xy)^a$
  - si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0 \qquad$ et $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$. Que se passe-t-il si $a < 0$?
- Démontrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0.$$
- Soit $t \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, montrer que :
$$\tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$$
  puis que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
- Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$ *(on montre de même que* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$*)* puis que les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$ et :
$$\forall x \in]-1, 1[\quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et} \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2 Compétences, méthodes, savoir-faire

Forme trigonométrique ou exponentielle. Étude de l'exponentielle complexe

- Déterminer la forme trigonométrique (ou exponentielle) d'un nombre complexe à partir de sa forme algébrique.
- Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe à partir de sa forme trigonométrique ou exponentielle.
- Déterminer l'argument principal d'un nombre complexe puis l'ensemble de ses arguments.
- Donner une interprétation géométrique de l'argument d'un nombre complexe.
- Utiliser la forme exponentielle pour simplifier des expressions.
- Transformer l'expression $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$
- Exponentielle complexe $e^z = e^{Re(z)}e^{iIm(z)}$: module, argument, calculs simples.

Fonctions circulaires et circulaires réciproques

- Connaître l'ensemble de définition et la représentation graphique des fonctions sinus, cosinus, tangente, arcosinus, arcsinus, arctangente.
- Connaitre l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions circulaires et circulaires réciproques.
- Connaitre les valeurs remarquables des fonctions circulaires et circulaires réciproques.
- Simplifier une fonction :
  - soit en la dérivant (si elle est dérivable), en espérant qu'elle donne une expression relativement simple, dont on peut trouver une primitive.
  - soit en utilisant les propriétés des fonctions circulaires et le caractère bijectif de arctan, arcsin et arcos.
- Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir les fonctions arcos, arcsin, arctan *(on veillera à déterminer au préalable l'ensemble de définition).*
- Montrer qu'une fonction f est une bijection continue d'un intervalle I vers un intervalle J et éventuellement déterminer l'expression de f^{-1} :
  - soit en utilisant la relation

$$\forall x \in I,\ \forall y \in J,\ f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

  - soit en trouvant une fonction g telle que $f \circ g = id_J$ et $g \circ f = id_I$,
  - soit, si c'est possible, en calculant $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, en espérant qu'on obtienne une expression relativement simple, dont on peut trouver une primitive.

Fonctions logarithme, exponentielle, puissances

- Résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir des fonctions logarithme, puissances ou exponentielle *(on veillera à déterminer au préalable l'ensemble de définition).*
- Étudier des fonctions de la forme u^v, où u et v sont deux fonctions réelles correctement définies *(on écrira $u^v = e^{v\times\ln(u)}$)*
- Calculer des limites faisant intervenir des croissances comparées.