Programme de colle n°5 (12 au 16 octobre 2026)

1 Question de cours

La question de cours sera notée sur 6 points

Les questions de cours porteront sur le chapitre **"Nombres complexes. Liens avec la trigonométrie."**

Afin de vous aider dans la préparation de votre colle, voici quelques questions incontournables :

1. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes (a, b, a' et b' sont des réels). Montrer que :

$$z \times z' = (aa' - bb') + i\,(a'b + ab')$$

$$si\ z \neq 0, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

2. Soient z et z' des nombres complexes. Montrer que :
   - $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$,
   - si de plus $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
   - $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
3. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   - $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
   - $|z| = 0 \iff z = 0$
   - $|zz'| = |z|\,|z'|$
   - si $z \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$|Re(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad Re(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$$

5. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$
6. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :
   - $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
   - $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
   - $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
7. Énoncer et démontrer les formules d'Euler et de Moivre.

2 Compétences, méthodes, savoir-faire

Généralités sur les nombres complexes

On note $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe et $a + ib$ son écriture algébrique, avec a et b deux réels.

- Écrire un nombre complexe sous forme algébrique.
- Reconnaître la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.
- Effectuer des opérations sur les nombres complexes : somme, produit, quotient.
- Déterminer le conjugué d'un nombre complexe.
- Montrer que z est un réel en montrant que $Im(z) = 0$ ou que $z = \overline{z}$
- Montrer que z est un imaginaire pur en montrant que $Re(z) = 0$ ou que $z = -\overline{z}$
- Calculer le module d'un nombre complexe z :
  - en utilisant $|z| = z \times \overline{z}$,
  - en utilisant $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
  - en utilisant les propriétés du module.
- Résoudre des équations faisant intervenir des modules, en utilisant des arguments géométriques ou algébriques.
- Utiliser l'inégalité triangulaire pour résoudre un problème.
- Interpréter géométriquement :
  - un nombre complexe *(notion d'affixe)*,
  - son conjugué,
  - son module *(cas particulier des cercles, des disques, de la distance entre deux points)*

Nombres complexes de module 1 et trigonométrie.

On note θ un réel

- Faire le lien entre $e^{i\theta}$ et le cercle trigonométrique.
- Utiliser les formules d'Euler et la technique de l'angle-moitié pour (re-)trouver des formules de trigonométrie, pour factoriser des expressions faisant intervenir des cosinus ou des sinus.
- Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour :
  - linéariser $(\cos(\theta))^n$ ou $(\sin(\theta))^n$ ou $(\cos(\theta))^n(\sin(\theta))^p$, c'est à dire transformer l'expression pour obtenir des sommes de sinus ou de cosinus d'angle de la forme $k\theta$ où k est un entier.
  - exprimer $\cos(p\theta)$ ou $\sin(p\theta)$ sous forme d'une **somme de puissances** de $\cos(\theta)$ ou $\sin(\theta)$ ("dé-linéariser")
  - calculer des **sommes** faisant intervenir des cosinus ou des sinus (en utilisant la notation $e^{i\theta}$ puis sa partie réelle ou imaginaire).